

MEDIDAS E ERROS

1. Introdução

Um aspecto importante da Física, Química, Engenharia, assim como outras disciplinas experimentais, é que elas são quantitativas, isto é, suas teorias fundamentam-se na medição de grandezas. Medir uma grandeza física significa comparar esta grandeza com uma outra grandeza do mesmo tipo escolhida como termo de comparação ou padrão. A medida de muitas grandezas é expressa por um valor numérico seguido de uma unidade como, por exemplo, 6370 km para o raio médio terrestre, $1,67 \times 10^{-27}$ kg para a massa do próton, ou 127 Volts para a diferença de potencial usualmente fornecida pela rede elétrica. Estas grandezas chamam-se dimensionais. Outras medidas constam apenas de um valor numérico desacompanhado de uma unidade: o índice de refração de um vidro é aproximadamente 1,50 e a densidade relativa do mercúrio metálico é 13,6. Nestes casos as grandezas são ditas adimensionais.

Do ponto de vista de teoria de erros, costuma-se idealizar que toda grandeza física possui um valor bem definido, ou exato, que aqui chamaremos de "valor verdadeiro" da grandeza. Quando se repete várias vezes a medição de uma grandeza, na maioria das vezes os sucessivos resultados não coincidem. Os novos valores da grandeza podem diferir muito pouco do valor inicial, mas dificilmente se consegue uma série de valores idênticos. Este fato reflete a impossibilidade de se conhecer o valor verdadeiro da grandeza em questão. As causas destas flutuações são erros de medição. Os erros podem classificar-se em dois grupos, os erros sistemáticos e os erros estatísticos.

Os erros sistemáticos são aqueles que ocorrem de forma a gerar desvios de medida (em relação ao que se acredita ser o "valor verdadeiro" da mesma) sempre no mesmo sentido, isto é, são aqueles que concorrem para causar um aumento sistemático ou uma diminuição sistemática nas medidas. Em outras palavras, os erros sistemáticos não possuem um caráter aleatório. Alguns exemplos de erros sistemáticos são: erro instrumental (gerado por exemplo, pela má calibração do instrumento de medida), erro ambiental (decorrente da interferência do ambiente através de fatores como, por exemplo, temperatura, pressão, humidade, campo magnético terrestre, etc, sobre a experiência), erro observacional (decorrente de procedimento inadequado do observador, como por exemplo, o erro de paralaxe quando se mede uma grandeza através de um instrumento de ponteiro), e o erro teórico (decorrente, em uma medida indireta, do uso de fórmulas teóricas aproximadas ou de valores aproximados de constantes físicas nas mesmas).

Mesmo quando os erros sistemáticos são substancialmente reduzidos (nem sempre é possível fazê-lo), ainda assim se observa que medidas sucessivas de uma grandeza física são discordantes. Isto se deve à existência de outros tipos de erros, os erros estatísticos.

Erros estatísticos são aqueles que produzem os desvios aleatórios que se observam em um série de medidas. Os erros estatísticos podem ser de naturezas diversas. Alguns erros estatísticos podem ser reduzidos ou praticamente eliminados. Com exemplo, podemos reduzir as flutuações nas medidas de massa fornecidas por uma balança colocando-a em uma mesa a prova de vibrações. Podemos também reduzir as flutuações nas medidas fornecidas por um instrumento eletrônico, minimizando o ruído gerado por sinais eletromagnéticos externos ao circuito do mesmo, através de uma blindagem apropriada. Certos erros estatísticos, entretanto, não podem ser reduzidos, como por exemplo aqueles decorrentes de flutuações intrínsecas à própria grandeza medida.

2. Valor Mais Provável e Precisão

Tendo-se em conta a impossibilidade de se conhecer o valor exato de uma grandeza física, estamos diante da seguinte questão: Que valor se deve adotar para tal grandeza?

Consideremos as medidas sucessivas diferentes x_1, x_2, \dots, x_n , que são obtidas para uma grandeza física e o valor médio (média aritmética) dessas medidas:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Admitindo-se que os erros sistemáticos tenham sido eliminados, espera-se que, quanto maior o número de medidas obtidas, mais próximo estará o valor médio assim obtido do "valor verdadeiro" da grandeza. Na prática, como não se efetuará um número infinito de medições, dentro do universo de medidas obtidas, o valor médio dessas será o valor mais provável da grandeza.

A dispersão do conjunto de medidas em relação ao valor mais provável pode ser quantificada procedendo-se da seguinte forma. Calculam-se os erros absolutos (também chamados desvios absolutos ou incertezas absolutas) de cada uma das medidas, definidas pelas diferenças entre essas medidas e o valor mais provável da grandeza:

$$\Delta x_1 = x_1 - \bar{x}, \quad \Delta x_2 = x_2 - \bar{x}, \quad \dots, \quad \Delta x_n = x_n - \bar{x}$$

e, em seguida obtém-se o erro médio absoluto, definido pela média aritmética dos valores absolutos dos últimos:

$$\overline{\Delta x} = \frac{1}{n} \sum_i |\Delta x_i|$$

O erro absoluto médio é um valor positivo expresso na mesma unidade da grandeza a que se refere. O conhecimento do valor mais provável x de uma grandeza e do erro médio absoluto Δx nos traz a informação de que o valor verdadeiro da grandeza, com base no conjunto de medidas obtido, está situado no intervalo $[\bar{x} - \overline{\Delta x}, \bar{x} + \overline{\Delta x}]$.

A precisão de uma medida é dada pelo erro relativo, definido pelo quociente do erro absoluto pela própria medida:

$$\Delta r_r = \Delta x / x.$$

O erro relativo assim definido fornece a precisão da medida: quanto menor o erro relativo, maior a precisão e vice-versa. O erro relativo é um número adimensional. O conhecimento de erros relativos obtidos em diferentes processos de medição nos permite comparar as precisões das medidas obtidas por tais processos.

O grau de reprodutibilidade de uma medida pode ser expresso calculando-se o erro relativo médio, definido pelo quociente entre o erro médio absoluto e tal valor:

$$\overline{\Delta r}_r = \overline{\Delta x} / \bar{x}$$

O número de algarismos com que uma medida é expressa deve refletir a precisão da mesma, como se verá com mais detalhe a seguir.

Exemplo. Considere as seis medidas abaixo mostradas, obtidas para a massa de um corpo, expressa em gramas: 13,62; 13,63; 13,64; 13,63; 13,60; 13,61.

O valor mais provável da massa do corpo será:

$$\bar{m} = (13,62 + 13,63 + 13,64 + 13,63 + 13,60 + 13,61)g / 6 = 81,73 \text{ g} / 6 = 13,621 \text{ g}.$$

Com quantos algarismos devemos escrever o resultado acima? A resposta dependerá do valor obtido para o erro médio absoluto, uma vez que este fornece a incerteza do valor mais provável. Calculando os desvios Δm_i de cada uma das medidas obtemos:

$$+0,001; -0,009; -0,019; -0,009; +0,021; +0,011.$$

Assim o erro médio absoluto será:

$$\overline{\Delta m} = (0,001 + 0,009 + 0,019 + 0,009 + 0,021 + 0,011) / 6 = 0,070 \text{ g} / 6 = 0,0118 \text{ g},$$

isto é, a incerteza no valor mais provável da medida se manifesta a partir da segunda casa decimal (casa dos centésimos). Portanto, é inútil manter tanto no erro médio como no valor mais provável algarismos que estão situados além da casa dos centésimos. O valor final para a massa do corpo será escrita como:

$$m = [\overline{m} \pm \overline{\Delta m}] \text{ unidades de massa.}$$

Neste exemplo, obtém-se $m = (13,62 \pm 0,01) \text{ g}$. O erro relativo da medida acima será:

$$\overline{\Delta m}_r = 0,01 \text{ g} / 13,62 \text{ g} = 0,0007 \text{ (ou } 0,07 \% \text{)}$$

Sempre que se calcula o valor mais provável, é apropriado fazer a operação até uma casa decimal além da última casa já existente nas medidas, apenas para o propósito de se efetuar um arredondamento: se o algarismo desta casa decimal for maior ou igual a 5 ele deve ser abandonado depois de aumentar de 1 o anterior; se for menor que 5 ele deve ser desprezado sem alterar o precedente.

3. Algarismos Significativos

Como foi mencionado anteriormente, o número de algarismos com que deve ser apresentada uma medida dependerá do erro absoluto associado à mesma.

Muito comumente adota-se a prática de expressar a incertezas em uma grandeza com apenas um algarismo, aquele correspondente à casa decimal de mais alta ordem do mesmo, fazendo um arredondamento, se necessário. Esta prática fundamenta-se na idéia de que tal algarismo informa com maior importância a magnitude da incerteza, e será a prática adotada neste curso.

Em qualquer medida, o algarismo de mesma ordem decimal que o de mais alta ordem no erro absoluto é sempre duvidoso ou incerto, sendo comumente chamado de algarismo duvidoso. Apesar deste caráter, tal algarismo ainda possui um significado e sempre deve estar presente em qualquer medida. O algarismo duvidoso e os algarismos anteriores, isto é, de ordem decimal mais alta, chamam-se algarismos significativos da medida. Esta terminologia reflete o conceito de que os algarismos à direita do algarismo duvidoso não transmitem informação a respeito da magnitude da grandeza, sendo ao contrário ilusórios, e devem, portanto, ser abandonados.

É bastante comum, ao se calcular o valor mais provável de uma medida, obter um número com algarismos em excesso, isto é, com algarismos sem significado, os algarismos situado à direita do algarismo duvidoso (Nós nos deparamos frequentemente com esta situação quando usamos uma calculadora eletrônica). Como mencionado acima, estes algarismos devem ser abandonados, após se fazer uso da seguinte regra de arredondamento: se o algarismo da casa decimal seguinte à do algarismo duvidoso for maior ou igual a 5 abandone-o depois de aumentar de uma unidade o algarismo anterior (duvidoso); se for menor que 5 despreze-o sem alterar o precedente.

Exemplos: Se a média aritmética vale 327,44 e o erro é 1, o arredondamento fornece 327 ± 1 , ou na notação científica, $(3,27 \pm 0,01) \times 10^2$. Se a média aritmética é 0,0586 e o erro é 0,03, o arredondamento nos dá $0,059 \pm 0,03$ ou $(5,93 \pm 0,03) \times 10^{-2}$.

Toda grandeza experimental deve em princípio ser acompanhada de uma indicação explícita da incerteza. Entretanto, nem sempre se tem uma indicação da precisão com que o valor foi determinado, isto é, muitas vezes seu erro não é indicado. Esta situação é típica da resolução de problemas, cujos enunciados dificilmente mencionam os erros dos valores fornecidos. Também não há registros dos erros em muitas tabelas de constantes físicas. Mesmos nestes casos devemos admitir a existência de erros e estimá-los, fazendo uso da seguinte regra:

Quando não houver indicação explícita da incerteza, o último algarismo será considerado como duvidoso e sujeito a uma incerteza absoluta de uma unidade naquela casa decimal

Exemplos:

- 1) O calor específico do alumínio é $c = 0,23 \text{ cal/(g.}^\circ\text{C)}$. Devemos considerar o algarismo 3 como duvidoso e a medida estará sujeita a uma incerteza de $0,01 \text{ cal/(g.}^\circ\text{C)}$, ou seja, $c = (0,23 \pm 0,01) \text{ cal/(g.}^\circ\text{C)}$.
- 2) O módulo da rigidez para o aço é $7,9 \times 10^{10} \text{ newtons/m}^2$. Aqui o algarismo duvidoso é 9 e neste caso assume-se incerteza de $0,1 \times 10^{10} \text{ newtons/m}^2$. Assim o valor para a rigidez será $(7,9 \pm 0,1) \times 10^{10} \text{ newtons/m}^2$.

É fácil compreender que se considerarmos duas ou mais medidas de uma mesma grandeza, a mais precisa será aquela que apresentar um maior número de algarismos significativos.

Antes de concluir esta seção, destacamos alguns pontos, com o objetivo de esclarecer o conceito de algarismos significativos.

Em primeiro lugar, é importante salientar que o número de algarismos significativos em uma medida não tem relação alguma com o número de casas decimais. Como exemplo, a espessura típica de uma página de papel, 0,1 mm, pode ser apresentada como 0,01 cm ou 0,0001 m. Em qualquer uma das formas apresentadas, a grandeza possui um algarismo significativo, o 1.

Também aproveitamos o exemplo acima para observar que os zeros à esquerda do primeiro algarismo não nulo de uma medida não são significativos, uma vez que eles não transmitem informação do ponto de vista da precisão da medida. De fato, tal conjunto de zeros apenas indica a posição da vírgula, podendo ser eliminados através de uma transformação de unidades da grandeza.

A forma com que o valor de uma grandeza é apresentada pode ser enganosa no que diz respeito a algarismo significativos. Aqui nos referimos especificamente ao caso em que aparecem zeros à direita do último algarismo (isto é, de ordem decimal mais baixa) não nulo da grandeza. Considere, por exemplo a medida da distância entre a Terra e o Sol, 150.000.000 km. Em princípio, de acordo com a regra acima, a medida possui nove algarismos significativos e a ela seria atribuída uma incerteza de 1 km. Observe, entretanto, que poderia ocorrer de o erro ser da da ordem de milhões de quilômetros. Neste caso os seis últimos zeros não seriam significativos e, mesmo assim a medida seria apresentada da mesma forma (150.000.000 km). Esta ambiguidade é eliminada fazendo-se uso da notação científica. Ela consiste em escrever os valores numéricos das medidas e de seus erros como o produto de um número entre zero e dez, que contenha apenas algarismos significativos, por uma potência de dez. Usando tal notação, as medidas mencionadas acima seriam apresentadas como:

$1,50000000 \times 10^8$ km (substituindo a notação 150.000.000 km com sete zeros significativos)

$1,50 \times 10^8$ km (substituindo a notação 150.000.000 km com um zero significativos)

Tendo em vista o exposto acima, a notação científica deve sempre ser preferida.

4 - Medidas Indiretas e Propagação de Erros

Quando comparamos uma grandeza com sua unidade correspondente, dizemos que foi efetuada uma medição direta da grandeza.

Diz-se que a medida de uma grandeza é indireta quando ela é obtida através de relações matemáticas entre ela e outras grandezas, das quais ela depende e que são medidas diretamente. Muitas vezes a medida de uma grandeza só pode ser obtida desta forma. É evidente que isto se refletirá no valor da grandeza subordinada, cuja incerteza dependerá das incertezas das medidas diretas. O estudo quantitativo desta questão é usualmente chamado de Propagação de Erros. Abaixo apresentamos algumas regras de propagação de erros que, embora não possam abranger todos os possíveis casos, têm utilização bastante ampla:

- I - Se uma grandeza é a soma ou diferença de outras, o erro absoluto do resultado é igual à soma dos módulos dos erros absolutos das parcelas;
- II - Se uma grandeza é igual ao produto de várias outras, ou igual ao quociente de duas outras, o erro relativo do resultado é igual à soma dos erros relativos das grandezas independentes.
- III - Se uma grandeza é potência de outra (seja o expoente positivo ou negativo, inteiro ou fracionário), o desvio relativo do resultado é igual ao produto do módulo expoente pelo erro relativo da base.

Observe que as duas últimas regras são enunciadas em termos de erros relativos, porque, quando os cálculos envolvem multiplicações, divisões e potências, é mais fácil achar primeiro o erro relativo e por meio dele o erro absoluto.

Exemplo: Num determinado experimento a medida da densidade ρ de um material foi obtida a partir de medidas diretas da massa m , da altura h e do lado da base b , de um bloco prismático de base quadrada feito deste material. Obtiveram-se as seguintes medidas e incertezas:

$$m = (1233,4 \pm 0,1) \text{ g}, \quad h = (12,30 \pm 0,02) \text{ cm}, \quad b = (3,35 \pm 0,01) \text{ cm}$$

Tendo-se em conta a relação $\rho = \text{massa} / \text{volume} = m / hb^2$, e as regras II e III acima, obtemos a seguinte expressão para a incerteza $\Delta\rho$ na densidade:

$$\Delta\rho / \rho = \Delta m / m + \Delta h / h + 2\Delta b / b.$$

Substituindo os valores, resulta:

$$\Delta\rho / \rho = 0,1 / 1233,4 + 0,02 / 12,30 + 2 \times (0,01 / 3,35) = 0,008.$$

A partir das medidas de m , h e b , o valor calculado para a densidade é $\rho = 9,0076 \text{ g/cm}^3$. O número de algarismos que devem ser mantidos neste resultado será determinado pelo erro absoluto, isto é:

$$\Delta\rho = 0,008 \times 9,0076 \text{ g/cm}^3 = 0,07 \text{ g/cm}^3$$

Observe que o erro absoluto foi arredondado de forma a ser apresentado com um algarismo significativo apenas, conforme regra adotada anteriormente. Tendo em vista que o erro obtido é da ordem de centésimos (de g/cm^3), esta será a ordem da casa decimal correspondente ao algarismo duvidoso na medida da densidade. Consequentemente tal grandeza deverá ser expressa com 3 algarismos significativos, devendo ser desprezados os algarismos 7 e 6 do cálculo inicial, após arredondamento apropriado:

$$\rho = (9,01 \pm 0,07) \text{ g/cm}^3 .$$

As três regras gerais enunciadas acima são úteis não apenas no trabalho de laboratório, como também na resolução de problemas. Como mencionado anteriormente, neste caso temos de fazer cálculos com medidas cujas incertezas são desconhecidas. Neste caso tais regras são adotadas e passam a ter dois objetivos: assegurar valores corretos no final dos cálculos e evitar cálculos desnecessários.

Quando resolvemos problemas, devemos operar não apenas com os valores numéricos fornecidos no enunciado, mas também com constantes físicas obtidas em tabelas, assim como com constantes matemáticas e valores de funções trigonométricas, logaritmos, etc. As regras abaixo permitem lidar coerentemente com todos estes dados. Se várias medidas em uma operação matemática são apresentadas apenas com seus algarismos significativos, a menos precisa, isto é, a que apresentar menor número de algarismos significativos é a que determinará o número de algarismos a ser mantido no resultado final, como veremos abaixo:

- Regra 1: Na adição e subtração, arredonda-se o resultado final de tal forma que este terá como algarismo duvidoso aquele correspondente à casa decimal do algarismo duvidoso de ordem decimal mais alta nas parcelas.
- Regra 2: Na multiplicação e divisão, arredonda-se o resultado final de tal forma que este apresentará o mesmo número de algarismos que o fator menos preciso.
- Regra 3: Na potenciação e radiciação, arredonda-se o resultado de tal forma que este terá o mesmo número de algarismos da base (ou radicando).

5. Erros Instrumentais

Aqui apresentamos algumas regras gerais para leitura de instrumentos, bem como para estimar as incertezas obtidas nessas leituras.

Leitura de Instrumentos

Como regra geral, o resultado da leitura deve incluir todos os dígitos que o instrumento permite ler diretamente mais um dígito que deverá ser estimado pelo observador.

Como exemplo, quando se mede uma dimensão de um objeto com uma régua milimetrada, a medida deve incluir um dígito correspondente à casa do décimo de milímetro, e que será estimado pelo observador.

Um outro exemplo seria ler a tensão na rede através de um voltímetro digital. Desde que a escala do instrumento tenha sido escolhida de forma apropriada, será observada uma flutuação apenas no último dígito. O observador deverá estimar este último dígito com base na flutuação observada.

Erro de Calibração

O erro sistemático que mais comumente contribui para a incerteza em uma medida realizada com um instrumento é o erro de calibração.

O erro de calibração deve ser fornecido pelo fabricante, que é responsável não apenas pela construção mas também pela calibração do instrumento. Desta forma, tal erro é usualmente encontrado no manual do instrumento.

Exemplo: Usou-se uma balança digital, cuja menor leitura é 0,01g, para medir a massa de uma esfera, tendo-se obtido o valor $m = 54,67$ g. O fabricante informa que na escala utilizada, o erro de calibração é de 0,8 % + 1 dígito (no último algarismo). Neste caso a contribuição do erro de calibração à incerteza da medida será:

$$\Delta m = (0,8 / 100) 54,67 \text{ g} + 0,01 \text{ g} = 0,45 \text{ g}.$$

Algumas vezes, entretanto, especialmente no caso de instrumentos mais simples, o erro de calibração não é fornecido, e neste caso, ele deve ser estimado, a partir da seguinte regra: o erro de calibração de um instrumento de medida pode ser admitido como igual à metade da menor divisão ou da menor leitura que é explicitamente indicada pelo instrumento.

Instrumentos Com Graduação

Muitos instrumentos fornecem a medida de uma grandeza através da leitura de uma graduação, tal como ao determinarmos um intervalo de tempo com um cronômetro de ponteiro, ou uma temperatura com um termômetro de mercúrio, ou ainda um comprimento com uma régua. Efetuar a medição significa ler a posição de um índice ou ponteiro sobre uma escala.

A figura abaixo procura representar a leitura de uma grandeza em uma escala graduada. A leitura correspondente à posição M é algum valor entre 14 e 15 unidades. Nestes caso deve-se fazer uma interpolação, isto é, imaginamos que cada um dos menores intervalos da graduação esteja dividido, por exemplo, em 10 partes iguais e estimamos a posição do índice nesta escala imaginária. Teríamos então obtido para a leitura algo como 14,4 unidades.

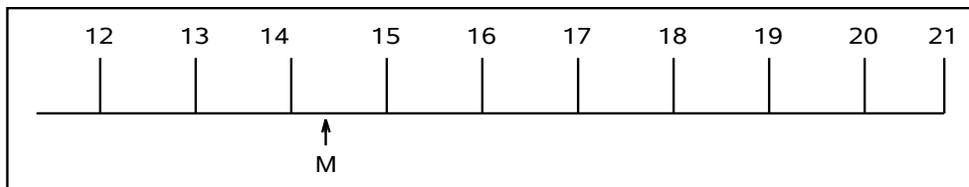


Figura 1

Frequentemente, quando se faz uso de tais instrumentos, a grandeza é medida apenas uma vez, e neste caso, o erro absoluto correspondente não é conhecido. Entretanto existirá uma incerteza no dígito subsequente ao da menor divisão da escala, e esta incerteza deve ser estimada.

Este erro denomina-se erro instrumental de leitura (ou erro avaliado do instrumento). Pode-se estabelecer um limite superior para este erro, com fundamento no fato de que a menor medida que um

instrumento com graduação pode fornecer corresponde à menor divisão de sua escala. O erro instrumental de leitura é no máximo igual à metade da menor divisão da escala.

Deve-se ter em mente que o erro instrumental de leitura não compreende todos os erros a que estão sujeitas as medidas obtidas com um instrumento com graduação. Como exemplo, este erro é frequentemente inferior ao erro de calibração do instrumento.

Entretanto, sempre que se mede uma grandeza apenas uma vez, por meio de um instrumento com graduação e, caso não haja informações sobre outros erros sistemáticos associados ao uso do instrumento (como o erro de calibração), a leitura deverá ser acompanhada do erro instrumental correspondente, que será então uma estimativa do erro obtido na utilização do instrumento. No exemplo acima a apresentação completa da medida M seria $M = 14,4 \pm 0,5$.

Instrumentos Digitais

Diferentemente dos instrumentos com graduação, os instrumentos digitais mostram todos os algarismos da leitura correspondente à medida. Entretanto, em geral, ocorre uma flutuação no último algarismo. Neste caso, o último algarismo deverá ser estimado de acordo com a flutuação observada, que também criará uma incerteza na leitura.

Exemplo: Utilizou-se um voltímetro digital para medir a força eletromotriz ε de uma pilha comum. Escolheu-se uma escala em que a menor leitura do instrumento é 0,001 Volt. O resultado obtido foi $\varepsilon = 1,49X$ Volts, onde se observou que o dígito X flutuava entre os algarismos 2 e 6. Neste caso o último algarismo deve ser estimado como 4, que é a média aritmética de 2 e 6. A leitura deve então deve ser apresentada como $\varepsilon = (1,494 \pm 0,002)$ Volts.

Aqui cumpre enfatizar que, também no uso de instrumentos digitais, deve-se sempre tentar conhecer o erro de calibração do instrumento, consultando o manual do mesmo. Este, frequentemente, é maior que a menor leitura do instrumento, podendo também ser superior à incerteza na leitura decorrente da flutuação no último dígito (erro estatístico de leitura).

Exemplo: Suponha que o erro de calibração do voltímetro do exemplo acima, na escala escolhida, seja igual a 0,05 % + 4 dígitos (no último algarismo). Neste caso, a contribuição do erro de calibração à incerteza da medida será:

$$\Delta\varepsilon = (0,05 / 100) 1,494 \text{ Volts} + 0,004 \text{ Volts} = 0,004 \text{ Volts}$$

Neste exemplo, o erro de calibração do instrumento é bem superior à menor leitura do instrumento, e também superior ao erro estatístico de leitura, e deverá ser adotado como o valor final para o erro de medida de ε .

Finalmente, aqui cumpre observar que este texto constitui apenas uma primeira introdução à matéria Medidas e Erros. Diversos outros conceitos e resultados concernentes ao tratamento estatístico de dados experimentais não serão aqui tratados e serão objeto de cursos posteriores.